数理解析研究所講究録
127巻 1971年 48-54

$\pi_4(MSpinTOP)$ と $\pi_4(MSTOP)$ について

京大理　松本堯生

§ 序

Kirby - Siebenman [1] の Topological Transversality 定理により Ω_n^{TOP}, $\Omega_n^{SpinTOP}$ が各々 $\pi_n(MSTOP)$, $\pi_n(MSpinTOP)$ に埋め込まれ, $n=4$ を除いては同型であることが分る。$n=4$ についても $\pi_3(TOP/PL) \cong \mathbb{Z}_2$ から容易に

(1) $\quad 0 \to \pi_4(MSpinPL) \to \pi_4(MSpinTOP) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$

(2) $\quad 0 \to \pi_4(MSPL) \to \pi_4(MSTOP) \to \mathbb{Z}_2 \to 0$

が分る。

一方 Schafer [3] の Topological rational Pontrjagin 類の定義の仕方によると, 同境群の元に対してばかりでなく $\pi_n(MSpinTOP)$, $\pi_n(MSTOP)$ 上にも rational Pontjagin 数が定義されることが分る。

この報告は $\pi_4(MSpinTOP)$ の中に p_1-数が 24 の元が存在することを示すことを主題とする。この

結果と $\pi_4(MSpinPL)$ の元の p_1-数が48で割り切れる（Rohlinの定理）ことに注意すると，完全列(1)は

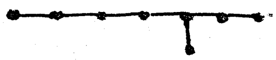
$$(1)' \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

の形であることが分る。同様に $\pi_4(MSTOP)$ の $\pi_4(MSPL)$ の像の外の元で p_1-数が0であるものの存在が分るから，完全列(2)は

$$(2)' \quad 0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 0$$

の形であることが分る。

§ p_1-数が24である $\pi_4(MSpinTOP)$ の元の構成

図式 E_8 () に付随した plumbing P^4 をとり，$X^4 = P^4 \cup C\partial P^4$ を考える。すると X は $w_1 = w_2 = 0$，$\pi_1 = \{1\}$，$Sign = 8$ の integral homology manifold である。更に Siebenman [4] により $X^4 \times S^1$ と homotopy type の等しい位相多様体 V^5 が存在する。$H_4(V^5) = H_4(X^4 \times S^1)$ の元 $\alpha = [X^4]$ を V^5 の中で位相部分多様体で実現したいが，この次元では Kirby-Siebenman の Transv. 定理が使えないので，V を充分高い次元

の球面 S^{5+k} に埋め込んで，その位相法bundle $\nu(V)$ を考える。$\nu(V)\longrightarrow V \cong X^4\times S^1 \longrightarrow S^1$ の結合写像 $\nu(V)\longrightarrow S^1$ を S^1 の一点 $*$ で transversal にしたものを f とし $N=(f)^{-1}(*)$ をとると，N は $\nu(V)$ の位相部分多様体であって，しかも duality によってその一点 compactification N^+ は $\phi\alpha\in H_{4+k}(T\nu(V))$ を実現している。

分類写像 $\nu(V)\longrightarrow\gamma_{SpinTOP_k}$ を N に制限して $N\longrightarrow\gamma_{SpinTOP_k}$ を得るが双方に $R=\mathbb{R}^1$ をかけて $N\times R\longrightarrow\gamma_{SpinTOP_k}\times R\longrightarrow\gamma_{SpinTOP_{k+1}}$ を得る。N の法bundle は1次元で $N\times R$ と同型であるからそれにより

$$S^{5+k}\longrightarrow(N\times R)^+\longrightarrow MSpinTOP_{k+1}$$

を得る。これは $\pi_4(MSpinTOP)$ の元を表わしており次の図式は可換である。

$$\begin{tikzcd}
S^{5+k} \arrow[rr] \arrow[dr] & & MSpinTOP_{k+1} \\
 & (N\times R)^+ \arrow[ur] & \\
 & \Sigma(N^+) \arrow[u, phantom, "\shortparallel"] \arrow[r, "\Sigma"] & \Sigma MSpinTOP_k \arrow[uu]
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
N^+ \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\cap" rotate=90] & MSpinTOP_k \\
T\nu(V) \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

一方 $\pi_4(\mathrm{MSpinTOP})$ の元の p_1-数とは $\phi p_1 \in H^{4+l}(\mathrm{MSpinTOP}_l ; \mathbb{Q})$ を代表元たる写像 $: S^{4+l} \longrightarrow \mathrm{MSpinTOP}_l$ によって引き戻して，S^{4+l} の基本類によって評価した値のことである。

従って上に構成した元に対しては，上の可換図式を用いると，その p_1-数は

$$< \Sigma(\phi_\nu p_1(V)|_{N^+}), \Sigma[N^+] > = < \phi_\nu p_1(V), [N^+] >$$

に等しいことが分る。$[N^+] = \phi_\nu \alpha$ に注意すると

右辺 $= < \phi\, p_1(V), \phi\alpha > = < p_1(V), \alpha >$ である。

ここで Novikov の補題 $< l(V), \alpha > = \tau(\hat{x})$ を用いると $< p_1(V), \alpha > = < 3\, l(V), \alpha > = 3 \cdot \tau(\hat{x})$ $= 3 \times 8 = 24$ を得る。よって Novikov の補題を証明すれば我々の目的は達せられることになる。

§ Novikov の補題の証明

補題 (Novikov)　M^{4k+1} を $(4k+1)$ 次元閉位相多様体，$l(M) \in H^{4*}(M ; \mathbb{Q})$ をその Thom-Hirzebruch 類とする。$\alpha \in H_{4k}(M ; \mathbb{Z})$ の元に対し $\tau(\hat{x})$ を $H^{2k}(\hat{M} ; \mathbb{Z})$ 上の 2 次形式 $(a, b) = < a \vee b, \hat{x} >$ の非退化部分の Signature とする。このとき

$$< l(M), \alpha > = \tau(\hat{x})$$

が成り立つ。

略証： $k \geqq 2$ のときは 余次元 1の homology 類を位相部分多様体で実現してやれば，位相多様体 M' とその ℓ-類に対しても Hirzebruchの式 $< \ell(M'), [M'] > = \tau(M')$ が成り立つから，Novikov の Doklady TOM 162 NO. 6 (1965) の証明方法がそのまゝ使える。 $k = 1$ のときは $N^4 = P^2(\mathbb{C})$ をかけて考えると，$< \ell(N), [N] > = \tau(N) = 1$ だから，$k = 2$ の場合を用いて

$$< \ell(M \times N), \alpha \times [N] > = \tau(\hat{\alpha} \times [N])$$

であるが 各辺は各々 $< \ell(M) \cdot \ell(N), \alpha \times [N] >$ $= < \ell(M), \alpha > \cdot < \ell(N), [N] > = < \ell(M), \alpha >$，$\tau(\hat{\alpha}) \cdot \tau(N) = \tau(\hat{\alpha})$ に等しくなり $< \ell(M), \alpha > = \tau(\hat{\alpha})$ を得る。 q.e.d.

[1] Kirby-Siebenman: Some theorems on topological manifolds (Amsterdam Conference 1970)

[2] Novikov: Homotopic and topological invariance of certain rational Pontrjagin classes, Doklady 162 (1965) no. 6

[3] Schafer: Topological Pontrjagin classes, Comment. Math. Helv. Vol 45 (1970) pp 315 ~ 332

[4] Siebenman: Disruption of low-dimensional handlebody theory to Rohlin's Theorem, Topology of Manifolds, Markham Publ. Comp. 1970

補足

本文では V と $[X^4]$ の組 $(V,[X^4])$ を $\pi_4(MSpin\text{-}TOP)$ の元とみることによって p_1-数が 24 の元の存在を示したわけであるが、ここでは同様にして一般の5次元位相多様体 M とその4次元整係数ホモロジー類 α の組 (M,α) を $\pi_4(MSTOP)$ の元とみることにより次の補題を証明する。

補題: $k(M,\alpha) = \langle k(M), \alpha \bmod 2\rangle \in \mathbb{Z}_2$

但し $k(M,\alpha)$ は $(M,\alpha)\in\pi_4(MSTOP)$ の k-数、

$k(M)\in H^4(M;\mathbb{Z}_2)$ は Kirby-Siebenman 類。

略証: k-数は $k\in H^4(BSTOP;\mathbb{Z}_2)$ から Pontrjagin-数と同様にして定義される。従って3頁の可換図から明らか。

系1. $k(M,\alpha)=0 \Leftrightarrow (M,\alpha)\in \mathrm{Im}(\pi_4(MSPL)\to\pi_4(MSTOP))$

系2. M スピン多様体のとき $k(M,\alpha) = \dfrac{\tau(\hat{\alpha})}{8} \bmod 2$

応用として次の定理を得る。

定理. M を5次元有向スピン位相多様体であって、$H^4(M;\mathbb{Z})$ が 2-torsion を持たないものとせよ。このとき M が三角分割可能であることと任意の4次元整係数ホモロジー類 $\alpha\in H_4(M;\mathbb{Z})$ に対し $\tau(\hat{\alpha})\equiv 0 \bmod 16$ であることとは同値である。とくに上の条件の下に三角分割可能性はホモトピー不変である。

略証: $\tau(\hat{\alpha})\equiv 0 \bmod 16\ (\forall\alpha) \Leftrightarrow k(M,\alpha)=0\ (\forall\alpha)$

補題から $\iff \langle k(M), x \bmod 2 \rangle = 0 \quad (\forall x)$

ところが一方 $H^4(M:\mathbb{Z})$ に 2-torsion なし は言い換えると

$H_3(M:\mathbb{Z})$ に 2-torsion なし，つまり $H_4(M:\mathbb{Z}) \xrightarrow{\bmod 2} H_4(M:\mathbb{Z}_2)$ が

onto，従って $x \bmod 2$ で $H_4(M:\mathbb{Z}_2)$ の元はつくされ

$k(M) = 0 \in H^4(M:\mathbb{Z}_2)$ と $\tau(\hat{x}) \equiv 0 \bmod 16 \ (\forall x)$ が

同値になる。